Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 3

Statique des fluides

I. Description d'un fluide . . . 1
II. Forces exercées sur un fluide au repos . . . 1
II.1. Forces volumiques et forces surfaciques . . . 1
II.2. Relation de la statique des fluides . . . 2
III. Exemples de champs de pression dans des fluides . . . 3
III.1. Cas d'un fluide incompressible . . . 3
III.2. Cas d'un fluide compressible . . . 3
IV. Résultante des forces de pression . . . 4
IV.1. Intégration des forces de pression . . . 4
IV.2. Forces de pression de direction constante . . . 4
IV.3. Forces de pression de direction variable . . . 5

I. Description d'un fluide

On utilise plusieurs échelles pour décrire la matière :

- l'**échelle macroscopique** permettant de décrire les objets de la vie courante, typiquement d'une taille supérieure au millimètre, où la matière apparait continue avec des variables thermodynamiques fixées (un solide à la température T par exemple) ;
- l'**échelle microscopique** permettant de décrire les atomes et les molécules, typiquement d'une taille inférieure au nanomètre, où la matière apparait discontinue avec des variables thermodynamiques qui ne peuvent pas être définies (il n'est pas possible de « mesurer » la température d'un atome) ;
- l'**échelle mésoscopique** qui est une échelle intermédiaire permettant de décrire les fluides, où la matière apparait continue avec des variables thermodynamiques qui évoluent de façon continue (un fluide dont la pression P augmente linéairement avec la profondeur par exemple).

On définit une **particule de fluide** comme l'ensemble des molécules contenues dans un volume mésoscopique à un instant donné.

II. Forces exercées sur un fluide au repos

II.1. Forces volumiques et forces surfaciques

Une **force volumique** est une force $\mathrm{d}\vec{F}$ qui s'exerce sur chaque élément de volume élémentaire $\mathrm{d}V$ d'un fluide.

On peut alors exprimer la densité volumique de forces :

$$\vec{f}_{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}V}.$$

Application :

Exprimons la densité volumique des forces de pesanteur qui s'exercent sur une particule de fluide de masse volumique ρ.

Le poids d'une particule de fluide de volume $\mathrm{d}V$ s'exprime : $\mathrm{d}\vec{P} = \mathrm{d}m\,\vec{g} = \rho\,\mathrm{d}V\,\vec{g}$, d'où une densité volumique de forces : $\vec{f}_{\mathrm{v,pesanteur}} = \rho\,\vec{g}$.

Une **force surfacique** est une force $\mathrm{d}\vec{F}$ qui s'exerce sur chaque élément de surface élémentaire $\mathrm{d}S$ d'un fluide.

On peut alors exprimer la densité surfacique de forces :

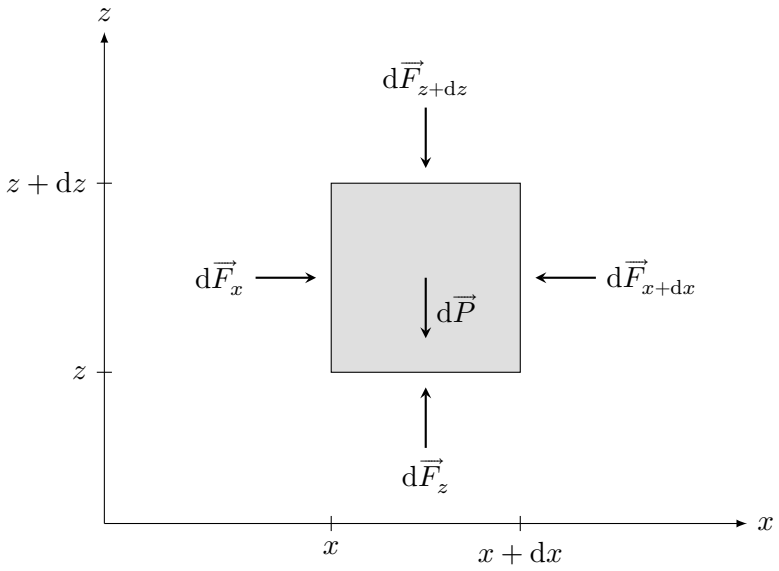
$$\boxed{\vec{f}_\mathrm{s} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}S}}.$$

Application :

> Exprimons la densité surfacique des forces de pression qui s'exercent sur la surface d'un fluide de normale $\vec{n}$ dans un champ de pression P.
> La force de pression qui s'exerce sur une surface $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ s'exprime : $\mathrm{d}\vec{F} = -P\,\mathrm{d}\vec{S} = -P\,\mathrm{d}S\,\vec{n}$, d'où une densité surfacique : $\vec{f}_{\mathrm{s,pression}} = -P\,\vec{n}$.

II.2. Relation de la statique des fluides

On considère une particule de fluide au repos de masse volumique ρ, de volume $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, dans un champ de pesanteur $\vec{g}$, qui est comprise entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$, les ordonnées y et $y+\mathrm{d}y$ et les côtes z et $z+\mathrm{d}z$.



Il s'exerce 7 forces sur cette particule de fluide :

- son poids $\mathrm{d}\vec{P} = \mathrm{d}m\,\vec{g} = \rho\,\mathrm{d}V\,\vec{g} = -\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,g\,\vec{e}_z$;
- la force de pression sur la surface en x : $\mathrm{d}\vec{F}_x = P(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_x$;
- la force de pression sur la surface en $x+\mathrm{d}x$: $\mathrm{d}\vec{F}_{x+\mathrm{d}x} = -P(x+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_x \approx -\left[P(x) + \dfrac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_x$;
- la force de pression sur la surface en y : $\mathrm{d}\vec{F}_y = P(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_y$;
- la force de pression sur la surface en $y+\mathrm{d}y$: $\mathrm{d}\vec{F}_{y+\mathrm{d}y} = -P(y+\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_y \approx -\left[P(y) + \dfrac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_y$;
- la force de pression sur la surface en z : $\mathrm{d}\vec{F}_z = P(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{e}_z$;
- la force de pression sur la surface en $z+\mathrm{d}z$: $\mathrm{d}\vec{F}_{z+\mathrm{d}z} = -P(z+\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{e}_z \approx -\left[P(z) + \dfrac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{e}_z$.

Comme la particule de fluide est au repos, l'équilibre des forces donne :

$$\mathrm{d}\vec{P} + \mathrm{d}\vec{F}_x + \mathrm{d}\vec{F}_{x+\mathrm{d}x} + \mathrm{d}\vec{F}_y + \mathrm{d}\vec{F}_{y+\mathrm{d}y} + \mathrm{d}\vec{F}_z + \mathrm{d}\vec{F}_{z+\mathrm{d}z} = \vec{0}$$

soit :

$$-\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_x - \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_y - \left(\rho\,g + \frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_z = \vec{0}$$

d'où :

- $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$, la pression P est donc indépendante de x ;
- $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$, la pression P est donc indépendante de y ;
- $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho\, g$, soit : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho\, g$, comme la pression P ne dépend que de z.

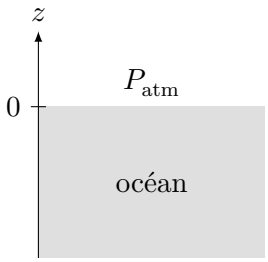
En exprimant ces résultats à l'aide de l'opérateur gradient, on obtient la **relation de la statique des fluides** :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(P) = \rho\,\vec{g}}\,.$$

III. Exemples de champs de pression dans des fluides

III.1. Cas d'un fluide incompressible

On souhaite déterminer le champ de pression $P(z)$ dans l'océan, en assimilant l'eau à un fluide incompressible de masse volumique $\rho = 1{,}0.10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. On note z l'axe vertical ascendant, avec $z = 0$ le niveau de la mer où règne la pression atmosphérique $P_{\mathrm{atm}} = 1{,}0\,\mathrm{bar}$.



La projection de la relation de la statique des fluides selon l'axe z donne :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho\, g$$

soit en intégrant :

$$P(z) = -\rho\, g\, z + C$$

avec C une constante que l'on détermine sachant que $P(0) = C = P_{\mathrm{atm}}$, d'où l'expression du champ de pression :

$$P(z) = P_{\mathrm{atm}} - \rho\, g\, z.$$

Application :

> Calculons la pression à 10 m de profondeur dans l'océan.
> On obtient : $P(z = -10\,\mathrm{m}) = 2.10^5\,\mathrm{Pa} = 2\,\mathrm{bar}$.
> La pression augmente linéairement de 1 bar tous les 10 m.

III.2. Cas d'un fluide compressible

On souhaite déterminer le champ de pression $P(z)$ dans l'atmosphère, en assimilant l'air à un gaz parfait de masse molaire $M_{\mathrm{air}} = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ à la température uniforme $T_0 = 15°\mathrm{C}$. On note z l'axe vertical ascendant, avec $z = 0$ le niveau de la mer où règne la pression atmosphérique P_{atm}.

La projection de la relation de la statique des fluides selon l'axe z donne :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho_{\mathrm{air}}\, g$$

où la masse volumique peut s'exprimer à l'aide de la relation des gaz parfaits :

$$\rho_{\mathrm{air}} = \frac{m_{\mathrm{air}}}{V_{\mathrm{air}}} = \frac{n_{\mathrm{air}}\, M_{\mathrm{air}}}{V_{\mathrm{air}}} = \frac{P\, M_{\mathrm{air}}}{R\, T_0}$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \frac{M_{\text{air}}\, g}{R\, T_0}\, P = 0.$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$P(z) = A \exp\left(-\frac{M_{\text{air}}\, g}{R\, T_0}\, z\right) = A \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

avec $H = \dfrac{R\, T_0}{M_{\text{air}}\, g}$ et A une constante que l'on détermine sachant que $P(0) = A = P_{\text{atm}}$, d'où l'expression du champ de pression :

$$P(z) = P_{\text{atm}} \exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

Application :

Sachant que la pression devient très faible lorsque $z \gg H$, déterminons un ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère terrestre.

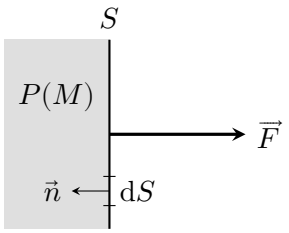
L'épaisseur de l'atmosphère terrestre est de l'ordre de : $H = \dfrac{R\, T_0}{M_{\text{air}}\, g} = 8{,}4\,\text{km}.$

IV. Résultante des forces de pression

IV.1. Intégration des forces de pression

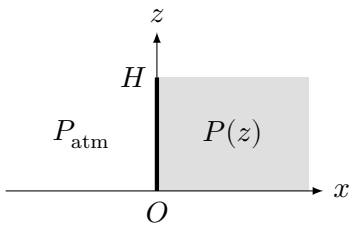
Pour exprimer la force de pression $\overrightarrow{F}$ exercée par un fluide sur une surface S dans un champ de pression $P(M)$, on décompose cette surface en surfaces élémentaires $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ de normale $\vec{n}$, puis on intègre les forces élémentaires $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$ correspondantes, soit :

$$\overrightarrow{F} = \iint_S \mathrm{d}\overrightarrow{F} = -\iint_S P(M)\,\mathrm{d}S\,\vec{n}.$$



IV.2. Forces de pression de direction constante

On souhaite déterminer la résultante des forces de pression exercées sur un barrage modélisé par un rectangle dans le plan (yOz) de largeur L pour une hauteur d'eau H. On note z l'axe vertical ascendant et P_{atm} la pression atmosphérique. Une vue de côté du barrage est représentée ci-contre.



On commence par déterminer le champ de pression $P(z)$ dans l'eau en projetant la relation de la statique des fluides selon l'axe vertical :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho\, g$$

soit en intégrant :

$$P(z) = -\rho\, g\, z + C$$

avec C une constante que l'on détermine sachant qu'à la surface de l'eau $P(H) = -\rho\, g\, H + C = P_{\text{atm}}$, d'où :

$$P(z) = P_{\text{atm}} + \rho\, g\, (H - z).$$

Chaque surface élémentaire $\mathrm{d}S = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ du barrage subit :

- une force exercée par l'air $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{air}} = P_{\text{atm}}\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_x$;

- une force exercée par l'eau $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{eau}} = -P(z)\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_x = -\left[P_{\text{atm}} + \rho\,g\,(H-z)\right]\mathrm{d}S\,\vec{e}_x$;

d'où une force totale : $\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{air}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{eau}} = -\rho\,g\,(H-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_x$.

On intègre pour obtenir la résultante des forces de pression :

$$\overrightarrow{F} = \iint_{\text{barrage}} \mathrm{d}\overrightarrow{F} = \int_{y=0}^{L}\int_{z=0}^{H} -\rho\,g\,(H-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_x = -\rho\,g\,\vec{e}_x \int_{y=0}^{L}\mathrm{d}y \int_{z=0}^{H}(H-z)\,\mathrm{d}z = -\rho\,g\,\vec{e}_x\,[y]_0^L \left[-\frac{(H-z)^2}{2}\right]_0^H$$

d'où finalement :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\rho\,g\,L\,H^2}{2}\,\vec{e}_x.$$

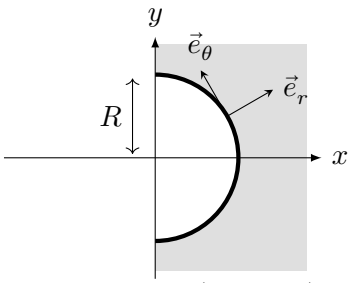
Application :

Estimons la résultante des forces de pression qui s'exerce sur un barrage rectangulaire de largeur $L = 400\,\text{m}$ avec une hauteur d'eau $H = 100\,\text{m}$.
On obtient : $F = 2.10^{10}\,\text{N}$.

IV.3. Forces de pression de direction variable

Application :

Déterminons la résultante des forces de pression exercées sur un barrage modélisé par un demi-cylindre de rayon R pour une hauteur d'eau H. On note z l'axe vertical ascendant et P_{atm} la pression atmosphérique. Une vue de dessus du barrage est représentée ci-contre.



Le champ de pression dans l'eau s'exprime toujours : $P(z) = P_{\text{atm}} + \rho\,g\,(H-z)$.
En coordonnées cylindriques, chaque surface élémentaire $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ du barrage subit :

- une force exercée par l'air $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{air}} = P_{\text{atm}}\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_r$;
- une force exercée par l'eau $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{eau}} = -P(z)\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_r = -\left[P_{\text{atm}} + \rho\,g\,(H-z)\right]\mathrm{d}S\,\vec{e}_r$;

d'où une force totale : $\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{air}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{eau}} = -\rho\,g\,(H-z)\,R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_r$.
On intègre pour obtenir la résultante des forces de pression : $\overrightarrow{F} = \iint_{\text{barrage}} \mathrm{d}\overrightarrow{F} = -\rho\,g\,R\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_r\,\mathrm{d}\theta\int_{z=0}^{H}(H-z)\,\mathrm{d}z = -\rho\,g\,R\,\frac{H^2}{2}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_r\,\mathrm{d}\theta$,
et il est nécessaire de repasser en coordonnées cartésiennes pour calculer : $\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_r\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y\right)\mathrm{d}\theta = \left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_x + \left[-\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_y = 2\,\vec{e}_x$,
d'où finalement : $\overrightarrow{F} = -\rho\,g\,R\,H^2\,\vec{e}_x$.